

数学のよさやおもしろさを実感できる数学的経験を

～算数・数学科における系統性を意識した授業づくり～

東北福祉大学教育学部

菅原敏彦

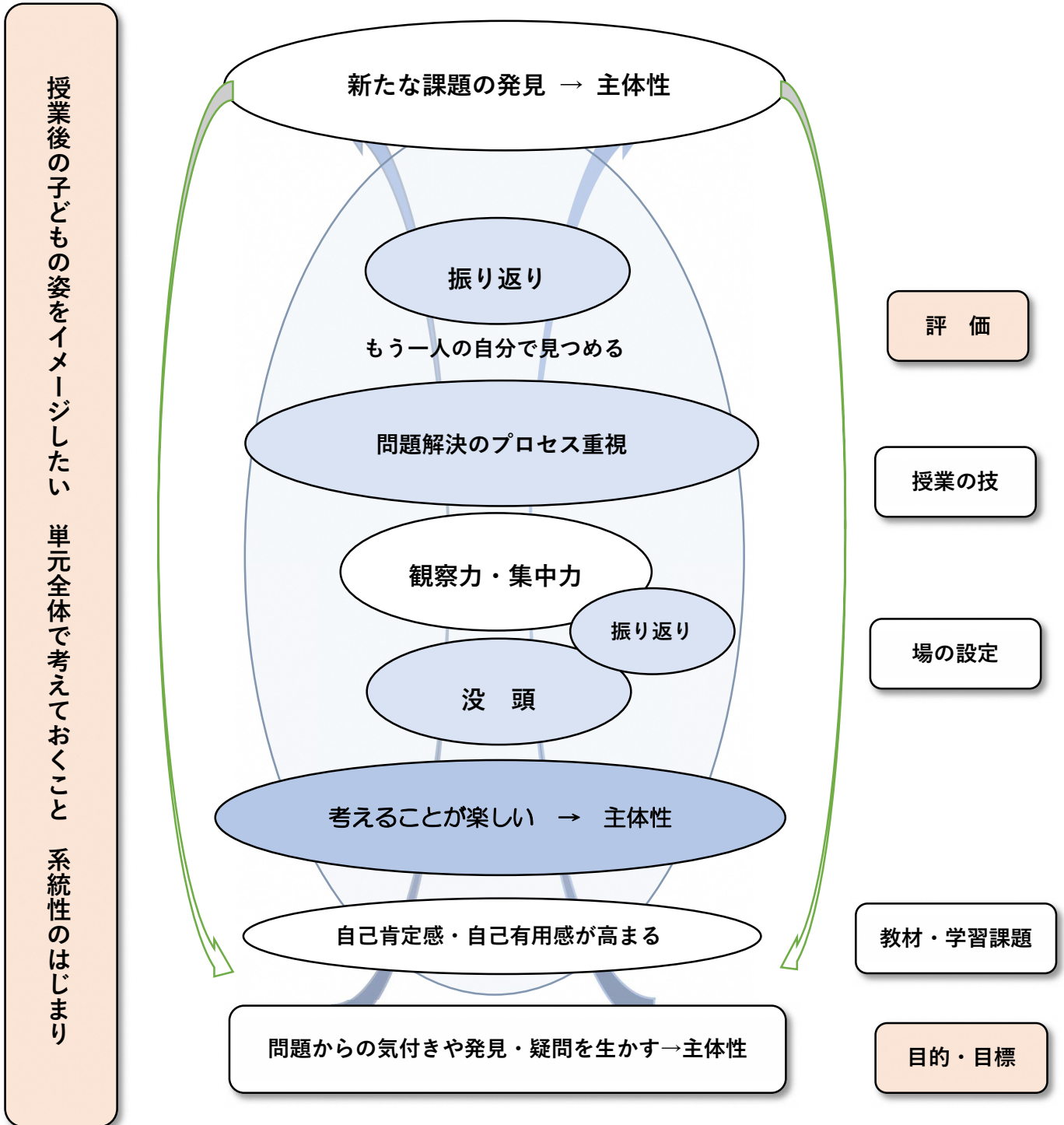


図1 授業の流れ

1 数学的活動の重要性

子どもたちの学習状況を見ると、体験が少なく、それを意味づけした経験が非常に乏しくなっている様子が見られる。

言葉の意味を真に理解できず、現実世界から受け取る具体的な情報について、**身体的な感覚を持ってない**ていることもある。

こういう状況の中で、数学の世界での子どもたちの現状を見ると、**数や量の大小が分からない子どもたちが数多くいて、そのために、数や量が表す意味が分からず、文書を読んでも理解ができない子どもたちが、増えているのではないだろうか**と考えられる。

現在の中学校学習指導要領解説数学編では、目標として次のようになっている。

(3) 数学的活動の楽しさや数学のよさを実感して粘り強く考え、数学を生活や学習に生かそうとする態度、問題解決の過程を振り返って評価・改善しようとする態度を養う。

この目標を実現するためには、これまで学んだことを活用しながら、見つけた課題解決のために**試行錯誤**することが極めて重要である。つまり、授業の中で、数学的活動の充実をこれまで以上に進めていく必要がある。

中学校の数学的活動については、学習指導要領では右のようになっている。

今、数学のよさやおもしろさを実感できるように

	第1学年	第2, 3学年
ア 日常の事象や社会の事象から問題を見だし解決する活動	日常の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決したり、解決の過程や結果を振り返って考察したりする活動	日常の事象や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決したり、解決の過程や結果を振り返って考察したりする活動
イ 数学の事象から問題を見だし解決する活動	数学の事象から問題を見だし解決したり、解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的に考察したりする活動	数学の事象から見通しをもって問題を見だし解決したり、解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的に考察したりする活動
ウ 数学的な表現を用いて説明し伝える活動	数学的な表現を用いて筋道立てて説明し伝える活動	数学的な表現を用いて論理的に説明し伝える活動

授業改善に必要なことは、数学的活動を計画的に位置づけ、子どもが、じっくりと問題から課題を見つけ、課題解決のために学んだことがどのように働くかという体験ができるようにすることである。さらには、試行錯誤した結果、どのようなことがわかり、これからどのようにすべきかを認識し、**粘り強くじっくりと考える時間を確保**することである。

子どもたちの学びの現状から、子どもたちの「気づき」や「発見」を生かしながら、数学的活動を中心とした試行錯誤を行う場を設けて、そこでの数学的経験を生かした授業を目指したい。

小中の連携の意図から、小学校の学習指導要領には次のように記されている。

第6学年	日常の事象を数理的に捉え問題を見いだして解決し、解決過程を振り返り、結果や方法を改善したり、日常生活等に生かしたりする活動	算数の学習場面から算数の問題を見いだして解決し、解決過程を振り返り統合的・発展的に考察する活動	問題解決の過程や結果を、目的に応じて図や式などを用いて数学的に表現し伝え合う活動
(中学校 第1学年)	日常の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決したり、解決の過程や結果を振り返って考察したりする活動	数学の事象から問題を見いだし解決したり、解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的に考察したりする活動	数学的な表現を用いて筋道立てて説明し伝え合う活動

2 数学的経験

コロナ渦にあつて、公開授業が減少し、それに伴って授業研究会もなくなり、さらに若い教員が増えている学校現場にあつて、授業後の検討会の充実も昨今の大きな課題と言える。**どんな授業提案で、工夫点はどこか、どこで子どもの学習状況を把握し、観点別学習状況評価をどのように行うかなどといった視点で話し合うことが授業後の検討会では重要である。**最近では、文科省の学力学習状況調査の結果を踏まえた、いわゆる「学力向上」のための授業研究会が多くなっているが、授業で子どもはどのように考えたのか、どんな数学的経験をしたのかというような、**数学的活動にかかわる議論**が決して多いとは言えない。

そういう議論を行うためには、授業者は授業計画に数学的活動を位置付け、子どもがじっくりと考える時間、試行錯誤する時間が必要である。子どもが、課題解決にむけて実践する場が必要である。齋藤喜博は「授業」（国土社）で次のように記している。

「教師でも子どもでも、実践することによってだけ自分を変えていくことができる。授業は、そういう意味での実践の場である」

授業の中で子どもが具体的な操作活動や既習事項を活用した内的思考による課題解決のための数学的活動を行い、自らの考えにこれまでの知識などを意味づける「数学的経験」をすることが、齋藤が言うところの実践の場と考える。

自分の考えた過程を振り返って、方程式や図形の性質など数学の様々な手立てを使って解決できることが理解できれば、数学のよさやおもしろさを実感することができ、「数学は日常生活で使えるな」とか「数学は便利なものだ」と感じることができる。

「数学的経験」については、私は次のように定義している。

『子どもの「気づき」「発見」を生かし、課題解決のための試行錯誤する活動で、既習事

項を活用して意味づけたり，新たな決まりや法則を見つけて，それを言語化し，その過程を振り返ったりすること』

このような数学的経験をすることによって，子どもは数学のよさやおもしろさを実感し，創造的な思考に移行し，変わっていくものと考ええる。

これに関わるものとして，齋藤喜博は，「授業」の中で次のように記している。

「従来のような一般的な知識を，ただ伝達し覚えさせるという授業の方法だけでは，おとなや子どもの認識を確かなものにしたり，自分の考えや概念を，他の世界に，移行したり変革したりすることはできない。」

（例 1）電話と電卓のキーの違いはどうなっているだろうか。すべてのキーの数を足すといくらになるか。いろいろな方法で求めてみよう。

このような問題を提示し，次のことに視点をおきながら実践をする。

- （1）子供の気付きや発見を生かす（自己肯定感と学習意欲を高める）
- （2）知る喜びを実感できるようにする（あたかも自分で発見したかのように）

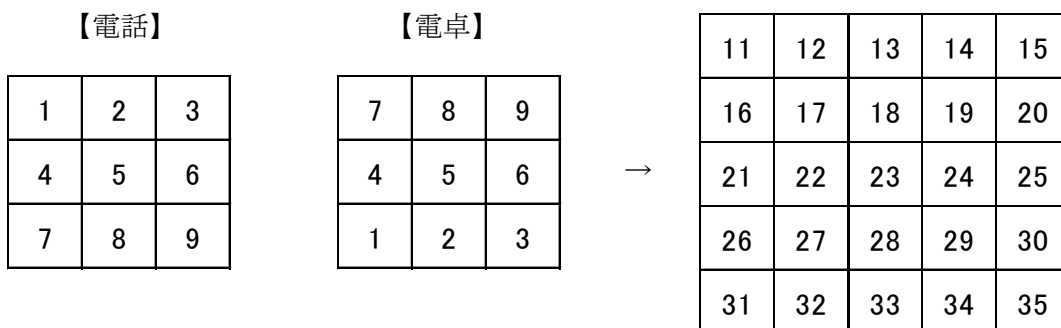


図 1

いろいろな方法で1～9までの和を求める。数の分解や合成，加法や減法などを活用しながら次の例のように試行錯誤する活動が見られる。

個で考えさせた後に，グループ学習を行い，考えを共有したい。

- （例）① $1 + 2 + \dots + 8 + 9$
 ② $(1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + 5$
 ③ $(1 + 5 + 9) + (3 + 5 + 7) + (4 + 5 + 6) + (2 + 5 + 8) - 5 \times 3$
 ④ 5×9

算数数学は「結果が出てからが勝負」

④の計算を取り上げ、子どもたちにどんな考え方をを使って計算したのかを考える活動を行う。

右図のように数を分解したり合成したりする考えが使われていることに気付く。さらには、平均の考え方が使われていることを理解し、自分の言葉で表現していく。

この例のような「数学的経験」をすることによって、その先の学習に生かすことができる。

例えば、先の図1の11から25までの連続した数の和を求める場合には、この「数学的経験」を生かすことができないだろうか考える子どもが出てくる。

さらには、かけ算九九表の数の和を求める問題に取り組むと図3のように行ごとに足していく方法だけではなく、中央の25に着目をして、これにマスの数をかける、つまり 25×81 で求めることができるのではないかと予測する。平均の考え方が使えることを理解する。

これまでの例のように電卓のキーの数の和を求める数学的経験をしておくことによって、数の感覚が豊かになり、様々な手続きを理解する。このような活動を意図的・

計画的に行うことによって、単なる**道具的な理解にとどまらない関係的な理解**につながり、「学んだことが役に立った」という数学のよさを実感することにつながる

2 系統性を意識した授業づくりでのポイント（実践から）

- ① 単元全体で授業計画を作り、特に**単元末にどんな問題を提示するか**を考えながら、積極的に既習事項を活用するような数学的活動を行う。（教科書の問題でも、他の問題でも）。
- ② 算数数学では、同じ考え方で解決できるものが数多くある。**数式領域での考え方が図形領域で生きる**（1から100までの和 台形の面積や高校の数列）。
- ③ やや**学習抵抗のある問題**を準備し、主体的に学習に取り組む態度の評価に生かすとともに、その問題にどんなよさやおもしろさが潜んでいるかを教師自身が見つけ、感動を子どもと一緒に得る。

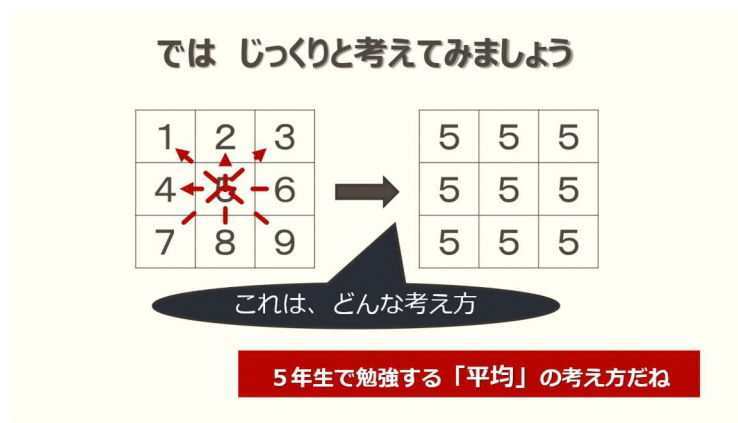


図 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	→ 45
2	4	6	8	10	12	14	16	18	→ 90
3	6	9	12	15	18	21	24	27	→ 135
4	8	12	16	20	24	28	32	36	→ 180
5	10	15	20	25	30	35	40	45	→ 225
6	12	18	24	30	36	42	48	54	→ 270
7	14	21	28	35	42	49	56	63	→ 315
8	16	24	32	40	48	56	64	72	→ 360
9	18	27	36	45	54	63	72	81	→ 405

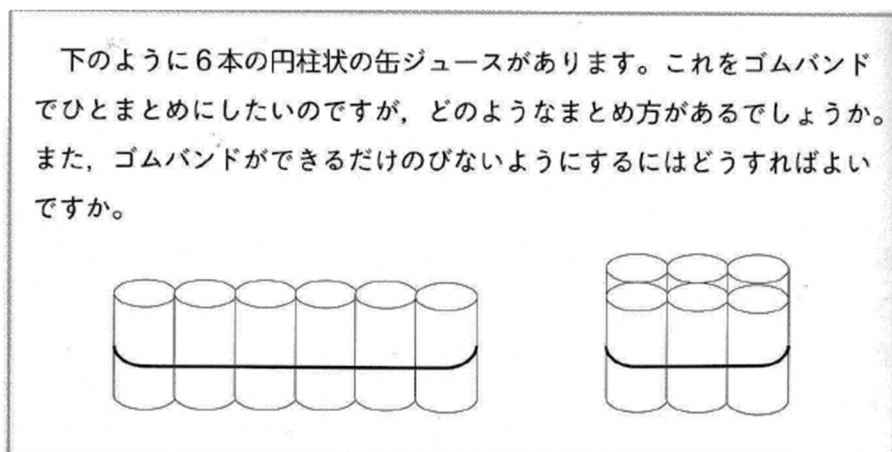
図 3

- ④ 系統図を使いながら，それぞれの領域がどのように関連しているかを確認する。
- ⑤ 改めて「教科書を教える」ではなく「教科書で教えること」を意識し，行間を読む。
- ⑥ それぞれの校種における「数学的活動」を積極的に行い，事実の伝達ではなく数学的経験をできるようにする。
- ⑦ 小学校の教員は中学校の教科書を，中学校の教員は小学校並びに高校の教科書があると，教材研究に生かせる。

系統性を意識した授業づくりを行うためには，教師自身が教材研究を楽しみ，算数数学のよさやおもしろさを実感し，以前と同じ問題を扱う場合にも，新たな気持ちで教材研究をし，子どもの前に立つことが大切である。

5 問題提示の工夫

数学的活動が充実していくような指導過程と同時に，それにふさわしい問題の提示が重要。さらには，問題から課題を見つけることができるような提示の仕方が大切。

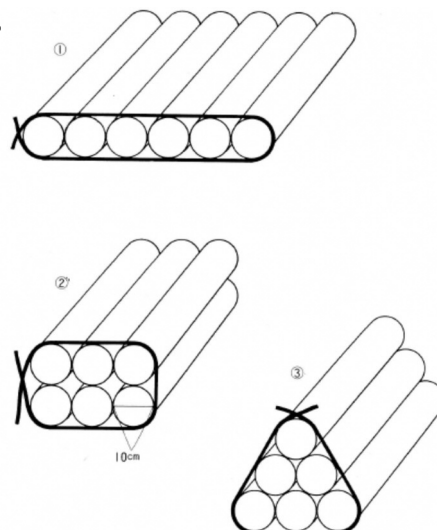


【小学校での扱い】

算数数学を小学校から高校までの内容で見えていくと，それぞれの校種で独立しているのではなく，深いつながりがあり，そのつながりを意識しながら指導していくことが大切である。特に，小学校での直感的な学びや数学的活動が数学を面白いものにし，「考えることの楽しさ」や「有用感」「必要感」を持てるようにする。

(例3)

直径10cmのビニール管6本をひもでくくりたい。ひもが一番短いのは・・・？



6 円の学習を楽しみ、円周率の意味をしっかりと理解したい

(例4)

①の長さ $8+8=16$
 $16 \times 3.14 = 50.24$
 $50.24 \div 2 = 25.12$ ①の長さ
 $8 \times 3.14 = 25.12$ ②+③の長さ
 $25.12 + 25.12 = 50.24$ ①+②+③の長さ
 (答え 50.24cm)
 直径16cmの円の円周と同じ長さになる。

①の長さ $3+6+3=12$ 大きい半円の直径
 $12 \times 3.14 = 37.68$
 $37.68 \div 2 = 18.84$ ①の長さ
 $3 \times 3.14 = 9.42$ ②+③の長さ
 $6 \times 3.14 = 18.84$
 $18.84 \div 2 = 9.42$ ④の長さ
 $18.84 + 9.42 + 9.42 = 37.68$
 (答え 37.68cm)
 直径12cmの円の円周と同じ長さになる。

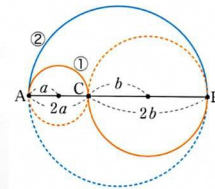
(例5) 【中学校では】

①の長さを表す式は

$$2a \times \pi \times \frac{1}{2} + 2b \times \pi \times \frac{1}{2} = \pi a + \pi b$$

②は、ABを直径とする半円であるから、その長さを表す式は

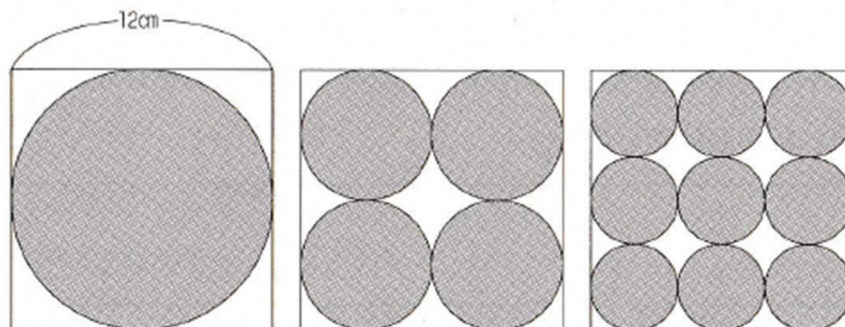
$$(2a + 2b) \times \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}(2a + 2b) = \pi a + \pi b$$



したがって、点Cの位置や線分ABの長さに関係なく、①の長さと②の長さは等しい。

7 円の学習では、おもしろやよさを存分に実感させたい

(例6) 円の面積が最も大きいのはどれでしょう（問題から課題を見つける）



もし、円が $4 \times 4 = 16$ 個になったら……。こういう問いを子どもから引き出したい。問いを引き出せるように、日頃から「もし、～だったら」と考える習慣を……

子どもの「気づき」「発見」「疑問」などが、問いを生み出す

さらに、中学校の学習では、次のような問題が考えられる。授業で学んだことが、十分に理解されているかどうかを見るための**評価問題を作成**することも重要である。

問題1を解いてから、問題2を評価問題として与えることにした。図2において「半径 r の円に内接する正六角形の各頂点を中心とする半径 r の円周が交わってつくられる6つの花びらの形をした図形の面積を計算しなさい。」（作図をさせながらの指導）

(例7)

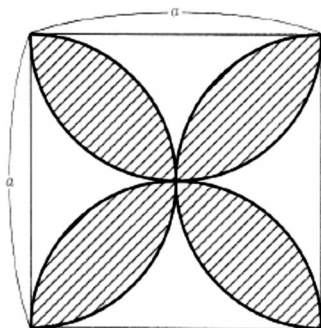


図1-問題1

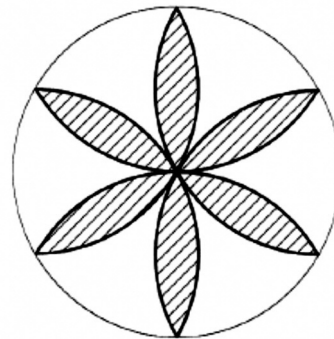
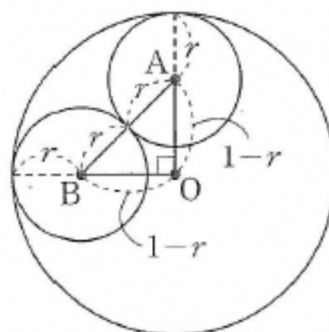
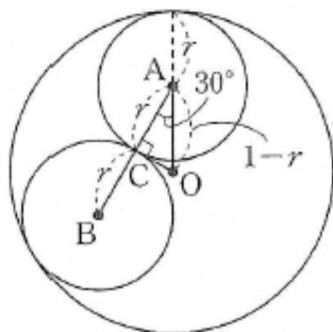
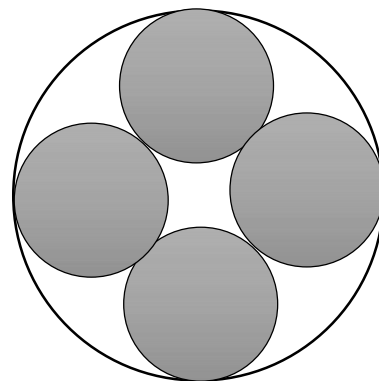
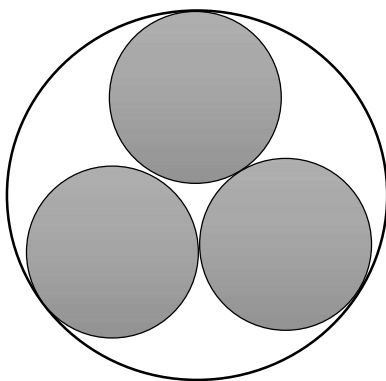


図1-問題2

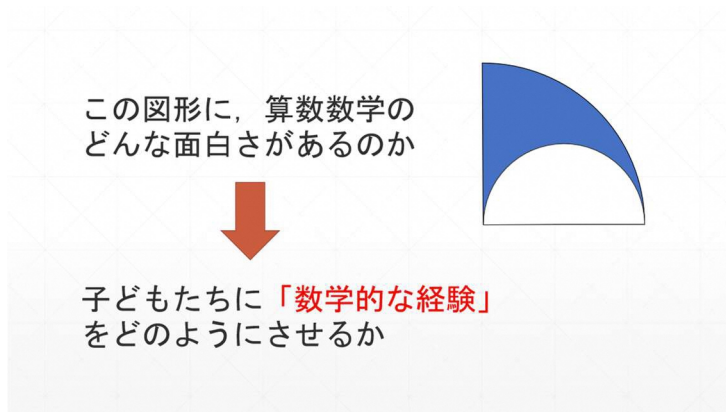
このような問題を、高校の数学I Aで見ると、次のような問題がある。

(例8)



（例9）どんな感動を与えたいか

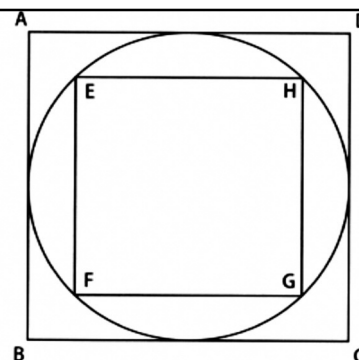
（個→グループ→共有 あたかも自分で発見したかのように）



8 結果（数学）は、私たちに語りかけてくれる

ひし形の面積を求める学習をした後に、発展的な問題として、次のような問題を提示する。問題を解いた後に、その結果から子供に気付かせたいことがある（**算数数学は結果が出てからが勝負**）。

（例10）
正方形ABCDの面積は 36cm^2 です。正方形EFGHの面積を求めてみよう。



9 学んだこと（直観・直感）が後で生きてくる

福男さんは、次の①②のような足し算を行い、10個の連続した数の足し算は、5番目の数によって決まりそうだと直観し、③の計算結果を予測しました。

③の計算結果を記し、福男さんの予測が正しいことを説明しなさい。

① $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$

② $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 85$

③ $8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 =$

このような経験をしておくことによって、「数の感覚」が豊かになり、見通しを持って解決方法を考え、予想を生かした思考に結びつく。この経験を、福島県のジュニアオリンピック等に生かすことができる。

10 算数数学のつながり（系統性）を意識した学習過程（学習の必要感・有用感）

例えば、5年生の三角形の面積の問題を考える。

1 ア、イ、ウの面積が等しいわけを説明しましょう。

まとめ

どんな形の三角形でも、底辺の長さが等しく、高さも等しければ、面積は等しくなります。

4 右のオの三角形の面積は何 cm^2 ですか。

エは、面積が 6cm^2 の三角形だよ。サとシの直線は平行だよ。

3 次の問題に答えましょう。

① 三角形ABEと三角形DBEの面積が等しいわけを説明しましょう。

② アとイの三角形の面積が等しいわけを説明しましょう。

（カとキの直線は平行）

アの三角形は、三角形ABEから三角形CBEをとった形で…。

1 下の図のように、平行四辺形ABCDの中に点Gをかき、A、B、C、Dのそれぞれの頂点と直線で結びます。

① 直線EFは、辺ADと平行です。点Gは、直線EFの上にあります。色をぬった部分の面積は何 cm^2 ですか。

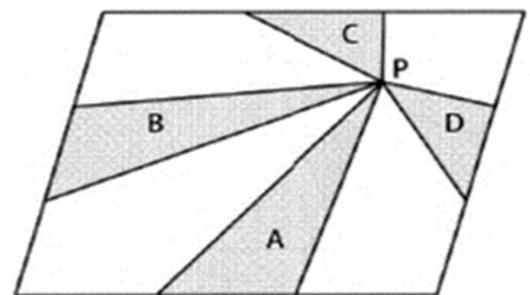
② 次に、点Gを平行四辺形の中のすきなところにかきました。色をぬった部分の面積は何 cm^2 ですか。

【発展的な問題】

平行四辺形の各辺を三等分して、内部に任意の点Pをとります。

$$A = 10\text{cm}^2 \quad B = 8\text{cm}^2 \quad C = 4\text{cm}^2$$

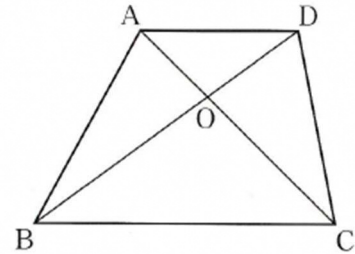
のとき、Dは何 cm^2 でしょうか



中学校での学習は、小学校の学びが活用でき、数学的経験が生きる

Q 考えてみよう

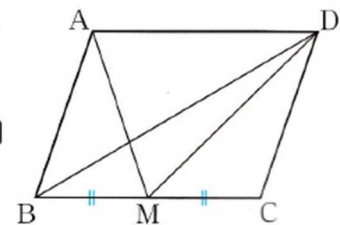
右の図は、 $AD \parallel BC$ である台形 $ABCD$ で、
対角線 AC と BD の交点を O とします。
右の図のなかから面積の等しい三角形の組を
見つけてみましょう。



問1

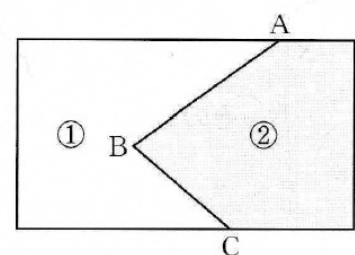
右の図の $\square ABCD$ で、 M は辺 BC の中点です。
このとき、面積の等しい三角形の組を見つけ、
そのことを式で表しなさい。

→ p.226 61

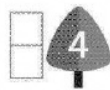


問2

右の図のように、土地が折れ線 ABC を境界線
として、2つの部分①、②に分かれています。
それぞれの土地の面積を変えずに、点 A を通る
直線で境界線をひきなおそうと思います。
その直線をひく手順を説明しなさい。

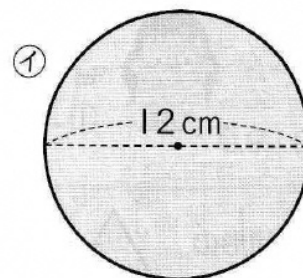
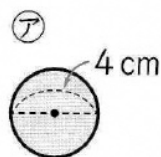


11 小学校では「内発的な学習意欲」を喚起させたい
既に小学校の拡大縮小で、中3の相似の学習を



①の円の円周の長さは、アの円の円周の長さの
何倍ですか。

また、①の円の面積は、アの円の面積の何倍ですか。



そのためには

- ① 既習事項を活用して、**新しい知識や方法をつくり出す経験を（あたかも自分でつくったかのように）**
- ② まわりの人と一緒に勉強することで、**自分一人では気付けなかったことに気付けたという経験を**

これらを実現するためには、**系統性を意識した教師の教材研究（他学年や中学校まで）**が大切。**子どもたちの言葉で拾い**，それを使って，**めあてやまとめを行う**など，まわりの人をみて学ぶことが多いことを実感させたい。めあては，設定した方がいい場合とそうでない場合があり，子どもの学習意欲がどのように高まるかを想像しながら設けたい。

【内発的な学習意欲】

- ・**興味・関心があるから**
- ・**面白いから 楽しいから**

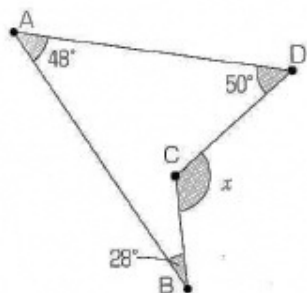
- ・好きだから
- ・もっと知りたいから 理解したいから
- ・もっと賢くなりたいから できるようになりたいから 成長したいから

算 数	数 学
直観的	論理的（論証的）
類比的・帰納的	演繹的
局所的	大局的
意味論的	構文論的

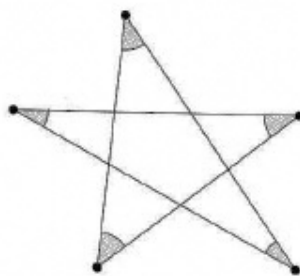
12 グループ学習の活用

【多様な考えを引き出すことができる問題】

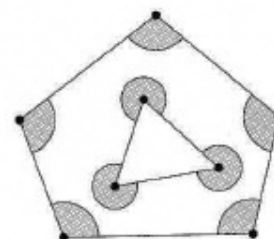
個(自力解決)→ グループ(集団・振り返り) → 学級全体へ → 個（振り返り）



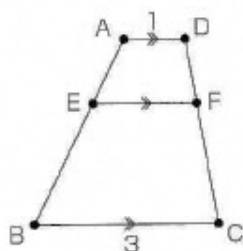
∠xの大きさは？



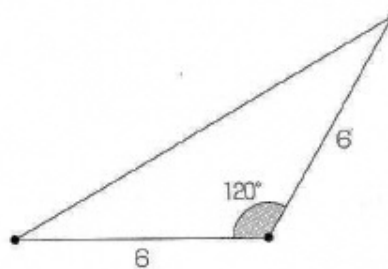
5つの角の和は？



8つの角の和は？



AE : EB = 1 : 2のとき、
EFの長さは？（相似な図形）



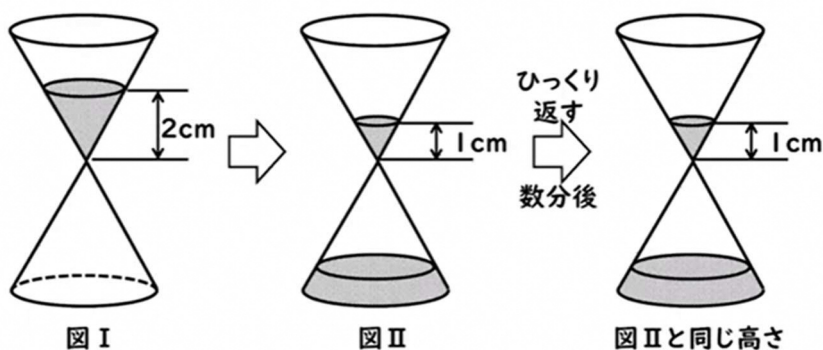
三角形の面積は？（三平方の定理）

【問題の把握が難しい場合】

グループ（集団）で問題の理解 → 自力解決 → 集団で比較・検討 → 学級全体

2つの円すいを組合せた形状の8分計の砂時計がある。図Ⅰのように砂時計の砂がすべて上側の円すいにある状態で砂の高さは2cmであった。いま、図Ⅱのように上側の円すいの砂の高さが1cmの状態になったとき砂時計をひっくり返した。この後、再び図Ⅱのように上側の円すいの砂の高さが1cmとなるのはひっくり返してから何分後か。ただし、上側の円すいに入っている砂の上面は常に水平であるものとし、また、砂の落下量は一定であるものとする。

- 1 2分後
- 2 3分後
- 3 4分後
- 4 5分後
- 5 6分後



最後に

- (1) 「授業後になってほしい子どもの姿」をイメージしたい。
- (2) 「教科書で教える」ことを目指したい（行間を読んで）。
- (3) 「主体的・対話的で深い学び」とか「個別最適な学び」「協働的な学び」というような言葉に振り回されないようにしたい。
- (4) 先人が取り組んできた実践を大切にしたい。
- (5) 様々な数値に踊らされないようにしたい。
- (6) 「物事は一体どうなっているのだろう」というような教師自身の「好奇心や探究心」を持ち続けたい。